به نام خدا

پروژه درس سمینار در مدیریت صنعتی

تحلیل عاملی(Factor analysis)

استاد: جناب دکتر فیضی

دانشجو: مهدی دیوسالار

تیرماه88

تحلیل عاملی

تحليل عاملي اصطلاحي است كلي براي تعدادي از تكنيك هاي رياضي و آماري مختلف اما مرتبط با هم به منظور تحقيق درباره ماهيت روابط بين متغيرهاي يك مجموعه معين. مساله اساسي تعيين اين مطلب است كه آيا يك مجموعه متغير را مي توان برحسب تعدادي از «ابعاد» يا «عامل هاي» كوچكتري نسبت به تعداد متغيرها توصيف نمود و هر يك از ابعاد (عامل ها) معرف چه صفت يا ويژگي است.

نخستين كار درباره تحليل عاملي توسط چارلز اسپيرمن (1940) صورت گرفت، كه به گونه كلي « پدر» اين روش شناخته شده است. بعد از او كارل پيرسن (1901)، روش«محورهاي اصلي» را پيشنهاد كرد و هتلينگ (1933) آن را به گونه كاملتري توسعه داد

بسياري از كارهاي نخستين در تحليل عاملي، يعني در طول سال هاي 1900 تا 1930،به كاربرد مدل اسپيرمن در بسياري از مسايل عملي و بررسي شرايط مناسب براي استفاده از آن مدل اختصاص يافته است. در طول اين دوره، علاوه بر خود اسپيرمن، دانشمندان ديگري مانند سيريل برت، كارل هليزينگر، ترومن كلي، كارل پيرسن و گادفري تامسون، كمك هاي شاياني به ادبيات تحليل عاملي كرده اند. در اوايل سال 1930، آشكار شد كه مدل تك عاملي عمومي اسپيرمن براي توصيف روابط بين متغيرهاي يك مجموعه هميشه كافي نيست.ترستون احتمالا برجسته ترين تحليلگر عاملي نوين بوده و نفوذ قابل ملاحظه اي در توسعه اين روش از سال هاي 1930 تا كنون داشته است. مسئوليت توسعه روش «سانتروئيد» با اوست كه در مقياس گسترده اي قبل از ظهور كامپيوترهاي پر سرعت به كار رفته است. او همچنين مسئول مفهوم ساختار ساده است كه توسط بيشترتحليلگران به عنوان معرف يك راه حل تحليل عاملي ايده آل در نظر گرفته شده است.كارهاي اوليه در تحليل عاملي كه توسط دانشمندان ياد شده انجام گرفته ، بيشتر وجيه نظري دارد، هر چند هيچ يك از آن ها آماده براي آزمون هاي آماري فرضيه هاي خاص درباره ساختارهاي عاملي مجموعه هاي معيني از متغيرها نبوده است. اما، وقتي كامپيوترهاي پر سرعت در اختيار قرار گرفت در اواسط تا اواخر سال هاي 1950، حركتي از تئوري گرائي به سوي آنچه تحليل عاملي اكتشافي ناميده مي شود، به وجود آمد. اين حركت به گونه آشكار از طريق تئوري عامل مشترك ترستون تشويق، و از طريق فرمول بندي عمومي هتلينگ (1993)، درباره عمليات رياضي مولفه هاي اصلي كه قبل از آن به دليل محاسبات فوق العاده پيچيده و پرزحمت آن ، به كار نرفته بود تسهيل شد. چنين به نظر مي رسد كه در طول سال هاي 1950 و 1960، تقريبا هر كس،

هر چيزي را تحليل عاملي مي كرده است، به اين اميد كه روابط پيچيده ظاهري بين متغيرهاي يك مجموعه را مي توان ساده كرد و به گونه ساده تري تفسير نمود (ليندمن و همكاران، 1980). در طول اين دوره همچنين تعداد روشهاي تحليل عاملي با ابداع تحليل تصوير (گاتمن، 1953)، تحليل عاملي بنيادي (رائو، 1955 و هريس، 1962)، تحليل عاملي آلفا (كيسر و كافري، 1965) و روش كمترين پس ماند (هامن و جونز، 1966)، به گونه قابل توجهي توسعه يافت. با اين وجود، روشهاي تحليل اكتشافي نتوانست آن گونه كه انتظار مي رفت، كمك موثري براي آزمون و پالايش تئوري روان شناختي باشد.

مقاله هتلينگ (1933) درباره تحليل مولفه هاي اصلي نخستين كمك قابل توجه يك آماردان را به تحليل عاملي معرفي كرد، و اين وضعيت تا موقعي ادامه داشت كه مقاله لاولي (1940) درباره روش بيشينه احتمال (ML) منتشر شد. لاولي نشان داد كه تحليل عاملي مي تواند به عنوان يك تكنيك آماري جالب در بسياري از موقعيت هاي پژوهشي كاربرد داشته باشد. واكنش هاي له و عليه اين روشها نيز تا وقتي كه آزمون فرضيه هاي خاص درباره پارامترهاي مدل تحليل عاملي مورد توجه قرار گرفت (مثلا جارزكاگ، 1984)، همچنان ادامه داشت. هر چند كارهاي جارزكاگ اساسا مبتني بر روش ML لاولي بود، اما بسياري از مسايل محاسباتي و تفسيري را كه لاولي با آن مرتبط نبود، روشهاي باك و بارگمن (1966) و جارزكاگ (1984) به سبب تاكيد بر آزمون فرضيه، به عنوان روشهاي تحليل عاملي تاييدي طبقه بندي مي شود. هر چند توليد فرضيه هايي كه بايد آزمون شود اغلب دشوار است، اما اين روشها به وضوح بر تحليل عامل اكتشافي به سبب توسعه و آزمون تئوري مزيت دارد. البته براي تدوين چنين فرضيه هايي مي توان ابتدا تحليل عاملي اكتشافي را اجرا كرد و سپس اين فرضيه ها را از طريق تحليل عاملي تاييدي آزمود.درك مفهومي تحليل عاملي و كاربرد آن بنا بر آنچه گفته شد، تحليل عاملي تكنيكي است كه كاهش تعداد زيادي از متغيرهاي وابسته به هم را به صورت تعداد كوچكتري از ابعاد پنهان يا مكنون امكان پذير مي سازد. هدف عمده آن رعايت اصل اقتصاد و صرفه جويي از طريق كاربرد كوچكترين مفاهيم تبيين كننده به منظور تبيين بيشينه مقدار واريانس مشترك در ماتريس همبستگي است. مفروضه اساسي تحليل عاملي اين است كه عامل هاي زيربنايي متغيرها را مي توان براي تبيين پديده هاي پيچيده به كاربرد وهمبستگي هاي مشاهده شده بين متغيرها حاصل اشتراك آنها در اين عامل ها است. هدف تحليل عاملي تشخيص اين عامل هاي مشاهده ناپذير بر پايه مجموعه اي از متغيرهاي مشاهده پذير است. عامل، متغير جديدي است كه از طريق تركيب خطي نمره هاي اصلي متغيرهاي مشاهده شده بر پايه فرمول زير برآورد مي شود:

$$Fj=\sum WjiXi=Wj1X1+Wj2X2+...+WjpXp$$

كه در آن W ها بيانگر ضرايب نمره عاملي و P معرف تعداد متغيرها است. اين عامل ها، في نفسه، سازه هاي فرضي يا نظري هستند كه به تفسير ثبات و هماهنگي در مجموعه داده ها كمك مي كنند. بنابراين ارزش تحليل عاملي اين است كه طرح سازماني مفيدي به دست مي دهد كه مي توان آن را براي تفسير انبوهي از رفتار با بيشترين صرفه جويي در سازه هاي تبيين كننده، به كار برد. اميد اين است كه تعداد كمي از اين عامل ها (يعني تركيب هاي خطي نمره هاي اصلي متغيرهاي مشاهده شده) بتواند تقريبا همه اطلاعاتي را كه توسط مجموعه بزرگتري از متغيرها به دست مي آيد در برگرفته در نتيجه توصيف ويژگي هاي فرد را ساده سازد. از اين گذشته اميدوار هستيم كه با توسعه صحيح عامل ها، متغيرهايي به وجود آوريم كه دلالت بر يك سازه روشن و با معناي روان شناختي داشته باشد به گونه اي كه توصيف ما از شخص نه فقط ساده تر، بلكه روشن تر و قاطع تر باشد.

تحلیل عاملی شیوه ای است که با استفاده از تکنیک های ریاضی و آماری، کاهش تعداد زیادی از متغیرهای وابسته به هم را به صورت تعدادی کوچکتری از ابعاد پنهان یا مکنون (عاملها) امکان پذیر می سازد.(تحلیل داده های چند متغیری در پژوهش رفتاری ، هومن؛ ۱۳۸۰)

مفروضه اساسی تحلیل عاملی این است که عاملهای زیربنایی متغیرها را می توان برای تبیین پدیده های پیچیده به کار برد، و همبستگی های پیچیده مشاهده شده بین متغیرها حاصل اشتراک آنها در این عاملها است. هدف تحلیل عاملی تشخیص این عاملهای مشاهده ناپذیر بر پایهٔ مجموعه ای از متغیرهای مشاهده پذیر است. (راهنمای آسان تحلیل عاملی ، مینایی ، ۱۳۸۰)

در یک مدل تحلیل عاملی، متغیرهای مشاهده شده $x_1, x_2, x_3, \ldots x_p$ به صورت ترکیبات خطی تعداد کمتری از متغیرهای غیرقابل مشاهده $f1,f2,f3, \ldots fm\ (m<p)$ (عامل ها) بیان می شوند(تحلیل عاملی ، نجیبی،۱۳۸۷)

مفهوم عامل های پنهان نخستین بار توسط گالتن (Galton, 1888) پیشنهاد شد و نخستین کار دربارهٔ تحلیل عاملی توسط چارلز اسپیرمن (Charles Spearman, 1904) صورت گرفت و هتلینگ (Hotelling, 1933) آن را توسعه داد.

ماتریس همبستگی در مورد عملکرد دانش آموزان در دروس ادبیات (x1) زبان فرانسه (x2) و زبان انگلیسی(x3) که توسط اسپیرمن ارائه شده

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0.83 & 0.78 \\ 0.83 & 1 & 0.67 \\ 0.78 & 0.67 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$x_3=\lambda_3 f+\varepsilon_3 \qquad x_2=\lambda_2 f+\varepsilon_2 \qquad x_1=\lambda_1 f+\varepsilon_1$$

در این معادلات f یک عامل مشترک اصلی است و λ_1، λ_2 و λ_3 به بارهای عاملی معروف اند. ε_1، ε_2 و ε_3 را جمله های تصادفی خطا می گوئیم

۱- تحلیل عاملی اکتشافی:

هدف از تحلیل عاملی اکتشافی، بررسی یک حوزه برای کشف ابعاد یا سازه های اصلی آن حوزه (عامل ها) است در این روش به این سوال پاسخ داده می شود که چه عاملهایی همبستگی های بین متغیرهای تحقیق را تبیین می کند.

۲- تحلیل عاملی تائیدی:

این روش توسط یورس کوگ (Yores Kog, 1973) ابداع شد. در این روش براساس مطالعات قبلی برای متغیرها ، بارهای عاملی فرض می شود، آنگاه برای برازاندن هرچه دقیق تر بارهای ماتریس هدف، تحلیل عاملی تائیدی انجام میگیرد.

مثال

IQ=*آزمون ضریب هوشی*

V= آزمون ادبیات

M = آزمون ریاضیات

S = آزمون نقشه کشی صنعتی

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} S & M & V & IQ \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 0/2 & 0/3 & 0/4 & 1 \\ 0/1 & 0/2 & 1 & 0/4 \\ 0/3 & 1 & 0/2 & 0/3 \\ 1 & 0/3 & 0/1 & 0/2 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} IQ \\ V \\ M \\ S \end{array} \end{array}$$

مرحلۀ اول : جمع کردن ضرایب هر ستون

بردار **Ua1** **Ua1=(1/9, 1/7, 1/8, 1/6)**

مرحلۀ دوم: نرمال کردن Ua1

این کار از طریق مجذور کردن و جمع کردن بردار **Ua1** و تقسیم هر یک از این اعداد بر ریشه دوم مجموع مجذورات انجام می گیرد

بردار مشخصه *va1*

$$k=(1/9)^2+(1/7)^2+(1/8)^2+(1/6)^2=12/3$$
$$\sqrt{k}=3/51$$
$$va_1=\frac{ua_1}{\sqrt{k}}=(0/54,0/48,0/51,0/46)$$

مرحلهٔ سوم: استخراج دومین بردار مشخصه *va2*:

va1= (0/54, 0/48, 0/51, 0/46)

$$\begin{array}{cc} \begin{matrix} S & M & V & IQ \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} 0/2 & 0/3 & 0/4 & 1 \\ 0/1 & 0/2 & 1 & 0/4 \\ 0/3 & 1 & 0/2 & 0/3 \\ 1 & 0/3 & 0/1 & 0/2 \end{bmatrix} & \begin{matrix} IQ \\ V \\ M \\ S \end{matrix} \end{array}$$

برای بدست آوردن اولین عنصر بردار ua2، عناصر اولین بردار مشخصه (va1)را در عناصر اولین ردیف ماتریس همبستگی R ضرب و با همدیگر جمع می کنیم و برای بدست آوردن سا یر عناصر بردار ua2 به همین ترتیب عمل می کنیم

0/54)+(0/48×0/4)+(0/51×0/3)+(0/46×0/2)=0/97

×1)=عنصر اول **ua_2**

=(0/54 ×0/4)+(0/48×1)+(0/51×0/2)+(0/46×0/1)=0/85

عنصر دوم **ua_2**

عنصر =(0/54 ×0/3)+(0/48×0/2)+(0/51×1)+(0/46×0/3)=0/9

سوم ua_2

=(0/54 ×0/2)+(0/48×0/1)+(0/48×0/3)+(0/48×1)=0/77

عنصر چهارم ua_2

ua_2 = (0/97 , 0/85 , 0/9 , 0/77)

مرحلهٔ چهارم: نرمال کردن ua2:

va2= (0/55 , 0/49 , 0/51 , 0/44)

مرحلهٔ پنجم: مقایسهٔ اولین و دومین بردار مشخصه:

va1= (0/54 , 0/48 , 0/51 , 0/46)

این دو با وجود شباهت های بسیار یکسان نیستند و لازم است سومین بردار مشخصه استخراج شود

مرحله ششم :استخراج سومین بردار مشخصه *va3*

این بردارد مانند *va2* استخراج می شود (0/98 , 0/85 , 0/9

ua_2 = (,0/75

Va3= (0/56 , 0/49 , 0/51 , 0/43)

مرحله هفتم: مقایسهٔ سومین و دومین بردار:

با دقت دو رقم اعشار و گرد کردن سومین رقم اعشار، منطقی است اگر استدلال کنیم که راه حل ها همگرا شده اند

مرحلهٔ هشتم: تعیین اولین عامل

ریشه دوم مجموع مجذورات بردار ua3 برابر با Ia یا ارزش ویژه است.

$$I_a = \sqrt{(0/98)^2 + (0/85)^2 + (0/9)^2 + (0/75)^2} = 1/75$$
$$v_{a_1} \times I_a = (0/54, 0/48, 0/51, 0/46)(1/75)$$
$$= (0/74, 0/65, 0/67, 0/57)$$

عامل ۱	متغیر
0/74	آزمون ضریب هوش **IQ**
0/65	آزمون ادبیات **V**
0/67	آزمون ریاضیات **M**
0/57	

آزمون نقشه کشی صنعتی **S**	

مرحلهٔ نهم: استخراج عامل دوم از روی ماتریس پس ماند (Residual Matrix

تشکیل ماتریس پس ماند(R1)

ابتدا بارهای عامل مربوط به عامل ۱ را دو به دو در هم ضرب می نمائیم و سپس عناصر این ماتریس را از ماتریس همبستگی اولیهٔ R کم می کنیم

$$\begin{bmatrix} 0/2 & 0/3 & 0/4 & 1 \\ 0/1 & 0/2 & 1 & 0/4 \\ 0/3 & 1 & 0/2 & 0/3 \\ 1 & 0/3 & 0/1 & 0/2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0/42 & 0/5 & 0/48 & 0/54 \\ 0/37 & 0/44 & 0/43 & 0/48 \\ 0/38 & 0/45 & 0/44 & 0/5 \\ 0/32 & 0/38 & 0/37 & 0/42 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0/22 & -0/2 & -0/08 & 0/46 \\ -0/27 & -0/24 & 0/57 & -0/08 \\ -0/08 & 0/55 & -0/24 & -0/2 \\ 0/68 & -0/08 & -0/27 & -0/22 \end{bmatrix}$$

متغیر	IQ	V	M	S
IQ	0/46	-0/08	-0/2	-0/22
V	-0/08	0/57	-0/24	-0/27
M	-0/2	-0/24	0/55	-0/08
S	-0/22	-0/27	-0/08	0/68

ماتریس پس ماندR1

با بررسی ماتریس R1 و با توجه به عناصری قطری مشخص می شود که عامل اول ۵۴ درصد از واریانس آزمون ضریب هوشی، ۴۳ درصد از آزمون ادبیات، ۴۵ درصد از آزمون ریاضیات و ۳۲ درصد از واریانس آزمون نقشه کشی صنعتی را تبیین نموده است. در نتیجه این عامل می تواند توانایی کلی یا عامل هوشی نام گذاری شود. عناصر دیگر کوواریانسهای تفکیکی میان متغیرها هستند یعنی همان کوواریانسهایی که در آنها تاثیر عامل اول حذف شده است. با حذف هر عامل، ضرایب ماتریس پس ماند کوچک و کوچک تر می شود تا اینکه کل واریانس ماتریس استخراج شود.درماتریسی با چهار متغیر، این وضعیت با استخراج چهار عامل اتفاق می افتد.

ماتریس پس ماند بایستی منعکس شود (statistical trick)

چرا که وقتی اثرهای عامل اول حذف می شود مجموع عناصر هر ستون صرف نظر از خطاهای مربوط به گرد کردن اعداد برابر صفر می شود

برای این کار سطر و ستون مربوط به متغیرهای S و M را در منفی ضرب می کنیم. ستخراج عامل دوم از ماتریس پس ماند R1 دقیقاً به همان شیوهٔ استخراج عامل دوم از ماتریس همبستگی صورت می گیرد.

متغیر	IQ	V	M	S
IQ	0/46	-0/08	0/2	0/22
V	-0/08	0/57	0/24	0/27
M	0/2	0/24	0/55	-0/08
S	0/22	0/27	-0/08	0/68

تعریف ریاضی یک عامل:

یک عامل از ترکیب خطی متغیرها بوجود می آید.

تعریف ریاضی بارهای عاملی:

بارهای عاملی همبستگی متغیرها با عامل است.استخراج عامل دوم در حالی صورت می گیرد که عامل اول از ماتریس حذف شده است و ماتریس پس ماند شامل واریانسها و کوواریانسهای تفکیکی است، یعنی عامل دوم باید ناهمبسته با عامل اول باشد

سوال: چند عامل بایستی استخراج شود؟

مثال ۲: پنج خصوصیت توسط یک دختر ۱۲ ساله بر روی اطرافیانش رتبه بندی شده است. این پنج خصوصیت عبارتند از: مهربانی، هوش، خوشحالی، دوست داشتن و عدالت، این رتبه بندی در جدول زیر آمده است

	مهربانی (x1)	**هوش (x2)**	**خوشحالی (x3)**	**زیبایی(x4)**	**عدالت (x5)**
همکلاسی ۱	۱	۵	۵	۱	۱
خواهر	۸	۹	۷	۹	۸
همکلاسی ۲	۹	۸	۹	۹	۸
پدر	۹	۹	۹	۹	۹
معلم	۱	۹	۱	۱	۹
برادر	۹	۷	۷	۹	۹
مادر	۹	۷	۹	۹	۷

ماتریس همبستگی (R) برای این پنج متغیر به صورت زیر است

$$
\begin{array}{c} \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & X_5 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1 & 0/296 & 0/881 & 0/995 & 0/545 \\
0/296 & 1 & -0/022 & 0/326 & 0/837 \\
0/881 & 0/022 & 1 & 0/867 & 0/13 \\
0/995 & 0/326 & 0/867 & 1 & 0/544 \\
0/454 & 0/837 & 0/13 & 0/544 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

چند عامل استخراج کنیم:

۱- از ماتریس همبستگی استنباط می شود که دو گروه از متغیرها داریم {۱و ۳ و ۴} و {۲ و ۵}، بنابراین انتظار می رود که همبستگی بین متغیرها را بتوان بخوبی با عامل بررسی کرد.

۲- مقادیر ویژه ماتریس R عبارتند از: 3/265، 1/538، 0/168، 0/031، و 0

حال اگر نسبت درصد تغییرات نمونه را بررسی کنیم، می بینیم که برای دو عامل اول داریم:

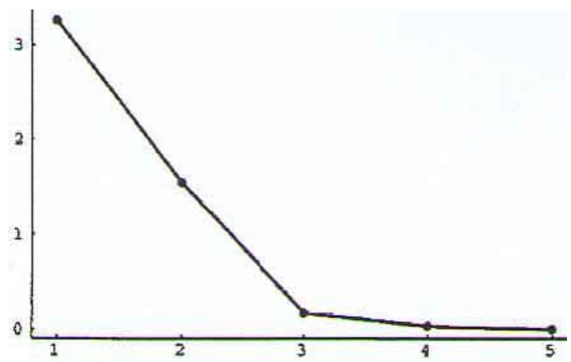
$$\frac{Q_1+Q_2}{P}=\frac{3/265+1/538}{5}=0/96$$

یعنی دو عامل اول ۹۶٪ از تغییرات واریانس را نمایش می دهد.

- نمودار سنگریزه : با استفاده از نمودار سنگریزه می توان پی برد که بعد از مقدار ویژه دوم نمودار تقریباً به صورت خطی در می آید.

مقادیر ویژه = 3/265، 1/538، 0/168، 0/031، و 0

مقادیر ویژه



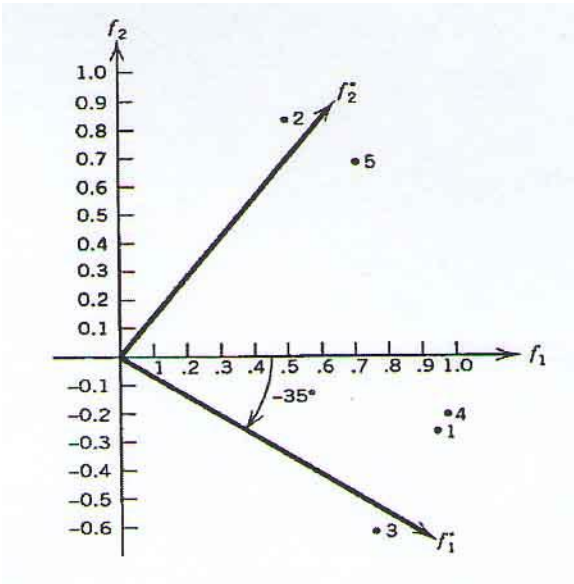
متغیرها	بارهای عامل ۱ λ_{1j}	بارهای عامل ۲ λ_{2j}	اشتراک ها $hi2 = \lambda^{2}_{1j} + \lambda^{2}_{2j}$	واریانس ویژه $\varphi_i = 1 - h^2$
مهربانی	0/969	-0/231	0/993	0/007
هوش	0/519	0/807	0/921	0/7
خوشحالی	0/785	0/587	0/96	0/04
زیبایی	0/971	0/21	0/987	0/013
عدالت	0/704	0/668	0/94	0/06
واریانس	3/236	1/538	4/802	
نسبت واریانس کل	0/653	0/308	0/96	
نسبت تجمعی	0/653	0/96	0/96	

دراینجا این دو عامل ۹۶ درصد ازتغییرات واریانس را نمایش می دهند و متغیرها را بخوبی شامل می شوند

چرخش بارها:

پس از رسم نمودار بارهای مربوط به دو عامل در صفحهٔ مختصات با محورهای f2 و f1 به طور شهودی می توان دید که اگر محورهای مختصات را ۳۵ درجه دوران دهیم، (Graphical Rotation) بارها نزدیک محورها قرار می گیرند و فرض اولیهٔ ما یعنی قرار گرفتن متغیرهای {۱و۳و۴} حول یک عامل و قرار گرفتن متغیرهای {۲و۵}

حول یک عامل دیگر بیشتر تائید می گردد.



اگر بخواهیم برآورد بارها را تحت دوران ۳۵ درجه به طور دقیق بدست آوریم ماتریس T را از ماتریس دوران برحسب زاویه به صورت زیر بدست آورده و مقادیر بارهای جدید با ضرب ماتریس بارها در T بدست می آید.

K* = ماتریس بارهای عاملی دوران یافته

$$T = \begin{bmatrix} \cos y & -\sin y \\ \sin y & \cos y \end{bmatrix}$$

$$k^{*} = KT = \begin{bmatrix} 0/969 & -0/231 \\ 0/519 & 0/807 \\ 0/785 & 0/587 \\ 0/971 & -0/21 \\ 0/704 & 0/667 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0/819 & 0/574 \\ -0/574 & 0/819 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0/927 & 0/367 \\ -0/037 & 0/959 \\ 0/98 & -0/031 \\ 0/916 & 0/385 \\ 0/194 & 0/65 \end{bmatrix}$$

	عامل ۱	عامل ۲	واریانس تبیین شده
متغیر x1 دوران نیافته	0/969	-0/231	0/99
متغیر x1 دوران یافته	0/927	0/367	0/99

واریانس تبیین شده در حالت دوران نیافته 0/99= (-0/231) + (0/969)

واریانس تبیین شده در حالت دوران یافته 0/99=(0/367) + (0/927)

بدین ترتیب مشاهده می کنیم که برحسب واریانس تبیین شده راه حل های اصلی و چرخش یافته یکسانند

لذا آشکار است که عاملهای چرخش یافته ممکن است هر وضعیتی را در فضای عاملی اشغال کنند و از این رو بی نهایت راه حل وجود دارد .در همه حالات اندازه قطر بردار مربوط به هر متغیر تغییر نمی کند اندازه قطر نشان دهندهٔ واریانس تبیین شده می باشد.